arXiv:0905.4370v1 [math.AG] 27 May 2009

AUTOMORPHISMES DE L'ESPACE DE DOUADY DE POINTS SUR UNE SURFACE K3

par

Samuel Boissière & Alessandra Sarti

Résumé. — Nous démontrons qu'un automorphisme de l'espace de Douady de points sur une surface K3 (non nécessairement algébrique) provient d'un automorphisme de la surface si et seulement s'il laisse globalement invariant le diviseur exceptionnel. Nous concluons sur quelques propriétés du réseau invariant et de son orthogonal sous l'action d'un groupe d'automorphismes symplectiques.

Introduction

L'étude des automorphismes des surfaces K3 a essentiellement commencé avec l'article de Nikulin [**13**] et de nombreux progrès ont été faits ces dernières années, en particulier concernant l'opération induite sur le second espace de cohomologie à coefficients entiers (réseau invariant et son orthogonal). Par contre, peu de choses sont connues concernant les variétés symplectiques holomorphes, qui sont la généralisation des surfaces K3 en dimension supérieure, même sur les schémas de Hilbert de points.

La motivation première de cette note est d'initier l'étude des automorphismes des variétés symplectiques holomorphes irréductibles, en vue de généraliser les résultats de Nikulin concernant les automorphismes des surfaces K3.

Soit S une surface K3, $n \geq 2$ et $S^{[n]}$ l'espace de Douady de n points sur S. C'est l'un des exemples les plus étudiés de variétés symplectiques holomorphes irréductibles. Il existe une application naturelle $\mathrm{Aut}(S) \to \mathrm{Aut}(S^{[n]})$ dont l'image consiste en des automorphismes *naturels* sur l'espace de Douady $S^{[n]}$. Le problème est de caractériser ces automorphismes. Nous démontrons (théorème 1) que l'unique condition est géométrique et très naturelle : il faut et il suffit qu'un automorphisme de $S^{[n]}$ laisse invariant le diviseur exceptionnel pour provenir d'un automorphisme de la surface (il suffit en fait de vérifier l'invariance de sa classe de cohomologie). Ce résultat complète l'article [**5**] consacré aux propriétés des automorphismes naturels. Nous considérons

Classification mathématique par sujets **(2000).** — 14C05.
Mots clefs. — Schéma de Hilbert, automorphismes, variétés symplectiques holomorphes.

ensuite l'action d'un groupe d'automorphismes symplectiques et étudions les propriétés des réseaux naturellement associés. Nous obtenons quelques résultats relatifs au réseau invariant et son orthogonal, similaires à ceux de Nikulin [**13**] sur les surfaces K3 ; certains sont vrais pour toute variété symplectique holomorphe irréductible, d'autres spécifiques aux espaces de Douady.

Nous remercions Daniel Huybrechts et Manfred Lehn pour leurs observations.

1. Rappels sur les variétés symplectiques holomorphes

Soit X une variété complexe kählerienne, symplectique et irréductible, de dimension $2n$ ($n \geq 1$). Considérons la décomposition de Hodge

$$H^2(X,\mathbb{C}) = H^{2,0}(X) \oplus H^{1,1}(X) \oplus H^{0,2}(X)$$

et posons $H^{1,1}(X)_{\mathbb{R}} := H^{1,1}(X) \cap H^2(X,\mathbb{R})$. Notons $\mathcal{K}_X$ l'ensemble des classes de $H^{1,1}(X)_{\mathbb{R}}$ pouvant être représentées par une forme fermée de type $(1,1)$ positive : c'est un cône convexe ouvert dans $H^{1,1}(X)_{\mathbb{R}}$, le *cône de Kähler* de X.

Il existe sur $H^2(X,\mathbb{Z})$ une forme bilinéaire symétrique canonique (voir [**3**]) notée q_X, la *forme de Beauville-Bogomolov* – dont nous noterons encore ainsi l'extension à $H^2(X,\mathbb{R})$ et $H^2(X,\mathbb{C})$ ainsi que la forme quadratique associée – non dégénérée et de signature $(3, b_2(X)-3)$ sur $H^2(X,\mathbb{R})$, telle que $H^{1,1}(X)$ est orthogonal à $H^{2,0}(X) \oplus H^{0,2}(X)$. La restriction de q_X à $H^{1,1}(X)_{\mathbb{R}}$ a pour signature $(1, b_2(X)-3)$ et pour toute classe de Kähler $\omega \in \mathcal{K}_X$, on a $q_X(\omega) > 0$.

Posons $\mathcal{S}_X := \{\alpha \in H^{1,1}(X)_{\mathbb{R}} \,|\, q_X(\alpha) > 0\}$. La signature de q_X indique que $\mathcal{S}_X$ est la réunion disjointe de deux cônes convexes ouverts. Celui qui contient le cône de Kähler est noté $\mathcal{C}_X$, le *cône positif* ; l'autre composante est notée $\mathcal{C}'_X$ et l'on a la propriété : $x \in \mathcal{C}_X \Leftrightarrow (-x) \in \mathcal{C}'_X$. Si $\omega \in \mathcal{K}_X$, $q_X(\omega,\cdot)$ est strictement positive sur $\mathcal{C}_X$ et pour tout diviseur effectif D sur X on a $q_X(\omega,[D]) > 0$ (voir [**11**]). Dans le cas particulier où X est une surface K3, cette propriété caractérise le cône de Kähler (q_X s'identifie alors à la forme d'intersection usuelle) au sens où si $\omega \in \mathcal{C}_X$ est tel que $q_X(\omega, d) > 0$ pour toute classe d d'un diviseur effectif sur X tel que $d^2 = -2$, alors $\omega \in \mathcal{K}_X$ (voir [**1**]).

Notons $\mathcal{A}_X \subset H^{1,1}(S)_{\mathbb{R}}$ le *cône ample*, *i.e.* le cône engendré par les premières classes de Chern $c_1(L)$ de fibrés en droites amples L sur X. On a $\mathcal{A}_X \subset \mathcal{K}_X$.

Soit $\mathrm{Pef}_{\mathrm{tr}}(X) \subset H^{1,1}(X,)_{\mathbb{R}}$ l'ensemble des *classes transcendantes pseudo-effectives*, *i.e.* pouvant être représentées par un courant positif fermé de type $(1,1)$. C'est un cône convexe fermé. La pseudo-effectivité est stable par image réciproque (au sens des courants) par les applications surjectives entre variétés compactes – une classe est pseudo-effective si et seulement si son image réciproque l'est – et l'on a $\mathcal{K}_X \subset \mathrm{Pef}_{\mathrm{tr}}(X)$ (voir [**6, 9**]). D'après Huybrechts [**12**], $\overline{\mathcal{C}_X} \subset \mathrm{Pef}_{\mathrm{tr}}(X)$.

Notons $\mathrm{NS}(X) := H^{1,1}(X)_{\mathbb{R}} \cap H^2(X,\mathbb{Z})$ le *groupe de Néron-Severi* de X, posons $\rho(X) := \mathrm{rg}\,\mathrm{NS}(X)$ le *nombre de Picard* et $\mathrm{T}(X) := \mathrm{NS}(X)^{\perp}$ l'orthogonal de $\mathrm{NS}(X)$ dans $H^2(X,\mathbb{Z})$ pour q_X, le *réseau transcendant.* Nous notons la signature d'un réseau sous la forme d'un triplet du nombre de valeurs propres positives, nulles puis négatives de la forme quadratique réelle associée. Il y a ici trois types possibles :

– type *hyperbolique* : $\mathrm{NS}(X)$ est non dégénéré, de signature $(1,0,\rho(X)-1)$ et $\mathrm{T}(X)$ a pour signature $(2,0,b_2(X)-\rho(X)-2)$;
– type *parabolique* : $\mathrm{NS}(X)\cap\mathrm{T}(X)$ est de dimension 1, $\mathrm{NS}(X)$ a pour signature $(0,1,\rho(X)-1)$ et $\mathrm{T}(X)$ a pour signature $(2,1,b_2(X)-\rho(X)-3)$;
– type *elliptique* : $\mathrm{NS}(X)$ est défini négatif, de signature $(0,0,\rho(X))$ et $\mathrm{T}(X)$ a pour signature $(3,0,b_2(X)-\rho(X)-3)$.

D'après Huybrechts [**11**], X est projective si et seulement si $\mathrm{NS}(X)$ est hyperbolique.

2. Schéma de Hilbert de points sur une surface K3

Soit S une surface K3 (non nécessairement algébrique) et $n\geq 2$. Notons S^n le produit de n copies de S, $p_i\colon S^n\to S$ la projection sur le i-ème facteur, $S^{(n)}:=S^n/\mathfrak{S}_n$ le quotient symétrique de S, où le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ agit par permutation des variables, $\pi\colon S^n\to S^{(n)}$ l'application quotient, Δ la réunion de toutes les diagonales de S^n et $D:=\pi(\Delta)$ son image dans $S^{(n)}$. Notons $S^{[n]}$ l'*espace de Douady* (ou *schéma de Hilbert* lorsque S est algébrique) paramétrant les sous-espaces analytiques de S de dimension nulle et de longueur n. D'après Beauville [**3**], $S^{[n]}$ est une variété complexe kählerienne, symplectique et irréductible. Le *morphisme de Douady-Barlet* (*de Hilbert-Chow* dans le cas algébrique) $\rho\colon S^{[n]}\to S^{(n)}$ est projectif et biméromorphe, c'est une résolution des singularités dont nous notons $E:=\rho^{-1}(D)$ le diviseur exceptionnel ; il est irréductible.

Il existe un morphisme injectif $\iota\colon H^2(S,\mathbb{C})\to H^2(S^{[n]},\mathbb{C})$ tel que

$$H^2(S^{[n]},\mathbb{C})=\iota\left(H^2(S,\mathbb{C})\right)\oplus\mathbb{C}[E]$$

(nous noterons $e:=[E]$) construit ainsi : pour $\alpha\in H^2(S,\mathbb{C})$, il existe un unique $\beta\in H^2(S^{(n)},\mathbb{C})$ tel que $\pi^*\beta=p_1^*\alpha+\cdots+p_n^*\alpha$ et l'on pose $\iota(\alpha):=\rho^*\beta$. Le morphisme ι est compatible aux structures de Hodge.

Convenablement normalisée, la forme $q:=q_{S^{[n]}}$ vérifie $q(\iota(\alpha))=\alpha^2$ pour tout $\alpha\in H^2(S,\mathbb{C})$ et $q(e)=-8(n-1)$. De plus e est orthogonal à $\iota\left(H^2(S,\mathbb{C})\right)$. Pour la structure entière : $H^2(S^{[n]},\mathbb{Z})=\iota\left(H^2(S,\mathbb{Z})\right)\oplus\mathbb{Z}\delta$ où δ est tel que $2\delta=e$ (voir [**3**]).

Il existe un morphisme de groupes naturel $-_n\colon\ \mathrm{Pic}(S)\to\mathrm{Pic}(S^{[n]})$ construit ainsi : pour tout fibré $L\in\mathrm{Pic}(S)$, le fibré $\bigotimes_{i=1}^n p_i^*L$ descend en un fibré $\mathcal{L}$ sur $\mathrm{Pic}(S^{(n)})$ et l'on définit $L_n:=\rho^*\mathcal{L}$. Par construction, on a $c_1(L_n)=\iota(c_1(L))$. Rappelons que $\mathrm{Pic}(S^{[n]})\cong\left(\mathrm{Pic}(S)\right)_n\oplus\mathbb{Z}\mathcal{D}$ avec $\mathcal{D}^2\cong\mathcal{O}(-E)$ et $c_1(\mathcal{D})=-\delta$.

Lemme 1. —

1. $\iota\left(\mathcal{C}_S\right)\subset\mathcal{C}_{S^{[n]}}$.
2. *Si* $\omega:=\iota(\omega_0)+\lambda e\in\mathcal{C}_{S^{[n]}}$, *alors* $\omega_0\in\mathcal{C}_S$. *On a* $\iota\left(\mathcal{C}_S\right)=\ \mathcal{C}_{S^{[n]}}\cap\ \iota\left(H^{1,1}(S)_{\mathbb{R}}\right)$.
3. $\iota(\mathcal{K}_S)\cap\mathcal{K}_{S^{[n]}}=\emptyset$. *Si* $\omega=\iota(\omega_0)+\lambda e\in\mathcal{K}_{S^{[n]}}$ *alors* $\lambda<0$ *et* $\omega_0\in\mathcal{K}_S$.

Démonstration. —

1. Soit Z_n le *schéma de Hilbert isospectral*, défini comme le produit direct réduit de $S^{[n]}$ avec S^n au-dessus de $S^{(n)}$ (voir Haiman [**10**]) et $\widetilde{Z_n}\to Z_n$ une résolution des

singularités. On a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \widetilde{Z_n} \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & S^n \arrow[d, "\pi"] \\ S^{[n]} \arrow[r, "\rho"] & S^{(n)} \end{tikzcd}$$

où f et g sont surjectives. Pour tout $\alpha \in H^2(S,\mathbb{C})$, on voit immédiatement que $\iota(\alpha)$ est tel que $f^*\iota(\alpha) = g^*(p_1^*\alpha + \cdots + p_n^*\alpha)$. Pour $\omega \in \mathcal{K}_S$, $\omega_n := p_1^*\omega + \cdots + p_n^*\omega$ est une classe kählerienne de S^n donc $g^*(\omega_n)$ est pseudo-effective, soit $f^*(\iota(\omega)) \in \mathrm{Pef}_{\mathrm{tr}}(\widetilde{Z_n})$. Cela implique que $\iota(\omega) \in \mathrm{Pef}_{\mathrm{tr}}(S^{[n]})$, ce qui exclut que $\iota(\omega)$ soit contenue dans la composante connexe $\mathcal{C}'_{S^{[n]}}$. Il en résulte que $\iota(\mathcal{C}_S) \subset \mathcal{C}_{S^{[n]}}$.

2. Si $\omega = \iota(\omega_0) + \lambda e \in \mathcal{C}_{S^{[n]}}$, on a $\omega_0^2 - 8\lambda^2(n-1) = q(\omega) > 0$ donc $\omega_0^2 > 0$. Si $\omega_0 \in \mathcal{C}'_S$, alors $(-\omega_0) \in \mathcal{C}_S$ et d'après la première assertion et par convexité on a $\omega + \iota(-\omega_0) = \lambda e \in \mathcal{C}_{S^{[n]}}$ ce qui est absurde, donc $\omega_0 \in \mathcal{C}_S$.

3. Si $\omega \in \mathcal{K}_S$, alors $q(\iota(\omega), e) = 0$ donc $\iota(\omega)$ n'est pas hählerienne pour $S^{[n]}$. Si $\omega = \iota(\omega_0) + \lambda e \in \mathcal{K}_{S^{[n]}}$, on a $0 < q(\omega, e) = -8\lambda(n-1)$ puisque e est la classe d'un diviseur effectif, ce qui force $\lambda < 0$. D'après la deuxième assertion on a $\omega_0 \in \mathcal{C}_S$. Si $\omega_0 \notin \mathcal{K}_S$ il existe un diviseur effectif D sur S tel que $\omega_0 \cdot [D] \leq 0$. Alors $\iota([D])$ est encore la classe d'un diviseur effectif et on a $q(\omega, \iota([D])) = \omega_0 \cdot [D] \leq 0$, contradiction. □

Remarque 1. — *L'argument utilisé pour la première assertion nous a été communiqué par Daniel Huybrechts. Si S est algébrique (donc projective), on peut argumenter différemment. Il existe une autre application* $\mathrm{Pic}(S) \to \mathrm{Pic}(S^{[n]})$ *: notons $\Xi_n \subset S \times S^{[n]}$ la famille universelle et p, q les projections respectives sur S et $S^{[n]}$; le morphisme p est plat. Pour $L \in \mathrm{Pic}(S)$, posons $\psi(L) := \det(q_*p^*L) \in \mathrm{Pic}(S^{[n]})$. L'application ψ n'est pas un morphisme de groupes et on a la relation :*

$$\psi(L) = L_n \otimes \mathcal{O}(-E)$$

(voir [**4**, Théorème A.1]*). D'après Catanese&Göttsche* [**7**]*, $\psi(L)$ est très ample si et seulement si L est n-très ample (au sens où pour tout sous-schéma $\xi \subset S$ de dimension nulle et de longueur inférieure ou égale à n l'application canonique $H^0(S,L) \to H^0(S, L\otimes\mathcal{O}_\xi)$ est surjective). En particulier, si L est ample, pour k assez grand L^k est très ample et L^{kn} est n-très ample (voir* [**4**, Lemme 0.1.1]*), donc $\psi(L^{kn})$ est très ample. Puisque S est projective, il existe un fibré très ample L, donc $c_1(L) \in \mathcal{A}_S$. On obtient $c_1(\psi(L^{kn})) = kn \cdot \iota(c_1(L)) - e \in \mathcal{A}_{S^{[n]}}$, ce qui exclut que $\iota(c_1(L)) \in \mathcal{C}'_{S^{[n]}}$ sinon par convexité on aurait $e \in \mathcal{C}'_{S^{[n]}}$.*

3. Classification des automorphismes naturels

Soit S une surface K3 et $n \geq 2$. Il existe un morphisme naturel $\mathrm{Aut}(S) \hookrightarrow \mathrm{Aut}(S^{[n]})$ associant à un automorphisme ψ de S l'automorphisme noté $\psi^{[n]}$ de $S^{[n]}$ (voir [**5**]). Un automorphisme f de $S^{[n]}$ est dit *naturel* s'il est dans l'image de ce morphisme, *i.e.* s'il existe un automorphisme ψ de S tel que $f = \psi^{[n]}$. De la relation $\psi^{[n]} \circ \rho = \rho \circ \psi^{(n)}$, où $\psi^{(n)}$ est similairement l'automorphisme de $S^{(n)}$ induit par ψ, et du fait qu'un

automorphisme naturel laisse globalement invariant le diviseur exceptionnel, on déduit que l'action de $\psi^{[n]}$ sur $H^2(S^{[n]},\mathbb{Z})$ se décompose sous la forme $(\psi^{[n]})^* = (\psi^*, \mathrm{id})$ dans la décomposition $H^2(S^{[n]},\mathbb{Z}) \cong H^2(S,\mathbb{Z}) \oplus \mathbb{Z}\delta$.

Théorème 1. — *Soit S une surface K3 et $n \geq 2$. Un automorphisme f de $S^{[n]}$ est naturel si et seulement s'il laisse globalement invariant le diviseur exceptionnel.*

Démonstration. — La condition est clairement nécessaire. Réciproquement, l'automorphisme f induit une isométrie f^* du réseau $\big(H^2(S,\mathbb{Z}), q\big)$ et si f laisse globalement invariant le diviseur exceptionnel, on a $f^*(\delta) = \delta$. Puisque δ est orthogonal à $\iota\big(H^2(S,\mathbb{Z})\big)$ pour la forme q, f^* stabilise $\iota\big(H^2(S,\mathbb{Z})\big)$ donc se décompose sous la forme $f^* = (\varphi, \mathrm{id})$ où φ est une isométrie de Hodge du réseau $H^2(S,\mathbb{Z})$.

Soit $\omega \in \mathcal{K}_{S^{[n]}}$, que le lemme 1 permet de décomposer de manière unique sous la forme $\omega = \iota(\omega_0) + \lambda e$ avec $\omega_0 \in \mathcal{K}_S$. Alors

$$f^*\iota(\omega_0) = \iota(\varphi^*(\omega_0)) + \lambda e \in \mathcal{K}_{S^{[n]}},$$

ce qui entraîne d'après le même lemme que $\varphi(\omega_0) \in \mathcal{K}_S$. D'après le théorème de Torelli global, l'isométrie de Hodge effective φ est induite par un unique isomorphisme ψ de S tel que $\psi^* = \varphi$.

L'automorphisme naturel $\psi^{[n]}$ de $S^{[n]}$ induit par ψ vérifie donc $(\psi^{[n]})^*(\delta) = \delta$ et $(\psi^{[n]})^*_{|H^2(S,\mathbb{Z})} = \varphi$ donc $(\psi^{[n]})^* = f^*$ sur $H^2(S^{[n]},\mathbb{Z})$. D'après Beauville [**2**, Proposition 10], l'application $\mathrm{Aut}(S^{[n]}) \to \mathcal{O}(H^2(S^{[n]},\mathbb{Z}))$ est injective, donc $f = \psi^{[n]}$. ☐

Remarque 2. —
- *Debarre* [**8**] *démontre le résultat similaire concernant les transformations birationnelles.*
- *Le résultat ne se généralise pas aux variétés de Kummer généralisées car elles admettent des automorphismes non triviaux agissant trivialement sur le second espace de cohomologie (*[**2**, Proposition 9]*).*

4. Surfaces K3 de nombre de Picard un

Soit S une surface K3 et $n \geq 2$. Pour tout $f \in \mathrm{Aut}(S^{[n]})$, nous définissons l'*indice* de f par

$$\lambda(f) := \frac{q(f^*(e), e)}{q(e)},$$

de telle sorte que, dans le groupe de Néron-Severi de f, on a $f^*(e) = \lambda(f)e + \iota(d)$ où $d \in \mathrm{NS}(S)$. On voit immédiatement que tout automorphisme naturel est d'indice 1, que pour tout automorphisme naturel f et tout automorphisme $g \in \mathrm{Aut}(S^{[n]})$ on a

$$\lambda(f \circ g) = \lambda(g) = \lambda(g \circ f),$$

et en particulier $\lambda(f \circ g \circ f^{-1}) = \lambda(g)$ donc l'indice est invariant pour l'action par conjugaison de $\mathrm{Aut}(S)$ (*via* les automorphismes naturels) sur $\mathrm{Aut}(S^{[n]})$.

Dans [**5**], il est démontré que si S est de nombre de Picard nul, alors tout automorphisme est naturel. L'argument utilisé était de nature plutôt topologique et

le théorème 1 en donne une seconde démonstration essentiellement algébrique. Nous traitons ici le cas où le nombre de Picard vaut un.

Proposition 1. — *Soit S une surface K3 de type hyperbolique ou elliptique telle que $\rho(S)=1$ et $n\geq 2$. Alors $f\in \mathrm{Aut}(S^{[n]})$ est naturel si et seulement si $\lambda(f)=1$.*

Démonstration. — On a $\mathrm{NS}(S)\cong \mathbb{Z}d$ avec $d^2\neq 0$. Posons $f^*(e)=\lambda(f)e+\mu\iota(d)$ avec $\mu\in\mathbb{Z}$. Puisque f^* est une isométrie, on a $q(e)=\lambda(f)^2q(e)+\mu^2d^2$. Si $\lambda(f)=1$, alors $\mu=0$ donc $f^*(e)=e$. Puisque E est rigide, il est donc globalement invariant par f, et d'après le théorème 1, f est un automorphisme naturel. La réciproque est claire. □

Remarque 3. —
- *Dans cet énoncé, si la surface S est algébrique (cas hyperbolique), alors l'indice d'un automorphisme n'est jamais nul, car $f^*(e)=\mu\iota(d)$ donnerait la norme $-8(n-1)=\mu^2d^2$, impossible si $d^2>0$.*
- *Le cas des surfaces paraboliques échappe à cette description.*

La question est de savoir si l'invariant $\lambda\colon \mathrm{Aut}(S^{[n]})\to\mathbb{Z}$ suffit à caractériser l'orbite des automorphismes naturels. Le résultat qui précède montre que c'est le cas en particulier pour toute surface K3 algébrique générique. Prenons par exemple $S\subset\mathbb{P}_3$ une surface K3 algébrique générique, ne contenant aucune droite. Notons h la classe d'un diviseur hyperplan. L'involution i bien connue de Beauville [**2**] sur $S^{[2]}$ est telle que $i^*(e)=-3e+4h$ et $i^*(h)=-2e+3h$ (voir par exemple Debarre [**8**]). Notre critère (re-)démontre que cette involution n'est pas naturelle.

5. Automorphismes symplectiques

Soit X une variété symplectique holomorphe irréductible et $G\subset\mathrm{Aut}(X)$ un groupe fini d'automorphismes. Notons σ_X un générateur de $H^{2,0}(X)$. Soit $\beta\colon G\to\mathbb{C}^*$ le caractère tel que $g^*\sigma_X=\beta(g)\sigma_X$ pour tout $g\in G$. Le groupe image de β est un groupe cyclique dont l'ordre s est appelé l'*indice symplectique* de G. Si $s=1$ on dira que G est un sous-groupe d'*automorphismes symplectiques*. Si X n'est pas projective, on a toujours $s=1$ (voir [**2**, Proposition 6 (i)]). Nous notons $\mathrm{Aut}^0(X)$ le groupe des automorphismes symplectiques de X ; c'est un sous-groupe normal de $\mathrm{Aut}(X)$.

Observons que si S est une surface K3, l'inclusion $\mathrm{Aut}(S)\hookrightarrow\mathrm{Aut}(S^{[n]})$ induit une inclusion $\mathrm{Aut}^0(S)\hookrightarrow\mathrm{Aut}^0(S^{[n]})$ car si σ_S est une forme symplectique sur S, $\iota(\sigma_S)$ est une forme symplectique sur $S^{[n]}$ (voir [**2**]).

Posons $\mathrm{T}_G(X):=H^2(X,\mathbb{Z})^G$. Puisque la forme q_X est non dégénérée sur $H^2(X,\mathbb{Z})$ et G-invariante, on voit facilement que sa restriction à $\mathrm{T}_G(X)$ est non dégénérée et on pose $\mathrm{S}_G(X):=\mathrm{T}_G(X)^\perp$ dans $H^2(X,\mathbb{Z})$. On a donc $\mathrm{T}_G(X)\cap\mathrm{S}_G(X)=\{0\}$.

Lemme 2. — *Le réseau $\mathrm{S}_G(X)$ est non dégénéré et ne contient pas de classes de diviseurs effectifs.*

Démonstration. — Puisque $\mathrm{T}_G(X)$ est non dégénéré, il en est de même de $\mathrm{S}_G(X)$. Supposons que $c\in\mathrm{S}_G(X)$ est la classe d'un diviseur effectif. Alors $\tilde{c}:=\sum_{g\in G}g^*c$

est effectif mais $\tilde{c} \in \mathrm{S}_G(X) \cap \mathrm{T}_G(X) = \{0\}$ donc $\tilde{c}$ est la classe d'un diviseur effectif linéairement équivalent à zéro, c'est impossible. □

Lemme 3. — *Soit S une surface K3, $n \geq 2$ et G un sous-groupe fini d'automorphismes symplectiques de $S^{[n]}$.*

1. *Le groupe G agit trivialement sur le réseau transcendant $\mathrm{T}(S^{[n]})$. Si S est de type hyperbolique ou elliptique, le résultat reste vrai si G n'est pas supposé fini.*
2. *On a $\mathrm{T}(S^{[n]}) \subset \mathrm{T}_G(S^{[n]})$ et $\mathrm{S}_G(S^{[n]}) \subset \mathrm{NS}(S^{[n]})$.*
3. *Si S est de type parabolique ou elliptique, alors $\mathrm{S}_G(S^{[n]})$ est défini négatif.*

Démonstration. —
1. Observons que $\mathrm{NS}(S^{[n]}) = \iota\,(\mathrm{NS}(S)) \oplus \mathbb{Z}\delta$ et $\mathrm{T}(S^{[n]}) = \iota\,(\mathrm{T}(S))$. Soit $t \in \mathrm{T}(S^{[n]})$. On calcule que

$$q(t, \sigma_{S^{[n]}}) = q(g^*t, g^*\sigma_{S^{[n]}}) = q(g^*t, \sigma_{S^{[n]}})$$

donc $g^*t - t \in \mathrm{T}(S^{[n]}) \cap \mathrm{NS}(S^{[n]})$. Dans les cas hyperboliques et elliptiques cette intersection est réduite à zéro donc $g^*t = t$ (ceci est donc vrai aussi si G n'est pas un groupe fini). Dans le cas parabolique, $F := \mathrm{T}(S^{[n]}) \cap \mathrm{NS}(S^{[n]}) \cong \mathbb{Z}$ et l'argument qui précède montre que G agit trivialement sur $\mathrm{T}(S^{[n]})/F$. Soit c un générateur de F. Alors c est de la forme $c = \iota(c_0)$ avec $c_0 \in \mathrm{T}(S) \cap \mathrm{NS}(S)$ et $q(c) = c_0^2 = 0$ donc d'après le théorème de Riemann-Roch, c_0 ou $-c_0$ est un diviseur effectif ; disons que c'est c_0. Alors c est aussi un diviseur effectif donc $g^*c = c$. Ainsi g^* agit trivialement sur F et $\mathrm{T}(S^{[n]})/F$ donc toutes ses valeurs propres sur $\mathrm{T}(S^{[n]})$ sont égales à un. Puisque g est d'ordre fini, g^* est diagonalisable donc finalement g^* agit comme l'identité sur $\mathrm{T}(S^{[n]})$.

2. La première inclusion résulte de l'assertion précédente, la deuxième s'obtient par orthogonalité.

3. On a $\mathrm{S}_G(S^{[n]}) \subset \mathrm{NS}(S^{[n]})$ et ce dernier est de signature négatif, donc $\mathrm{S}_G(S^{[n]})$ est négatif, et non dégénéré d'après le lemme 2, donc finalement défini négatif. □

Remarque 4. —
1. *La première assertion généralise le résultat équivalent de Nikulin* [**13**] *concernant les surfaces K3, et reste vraie pour toute variété symplectique holomorphe irréductible de type hyperbolique ou elliptique, par le même argument (voir* [**2**]*) ; seul le type parabolique est nouveau et obtenu uniquement pour les espaces de Douady (le type de S est aussi celui de $S^{[n]}$). La réciproque est vraie sur toute variété symplectique holomorphe irréductible X (c'est en partie écrit dans* [**2**]*) : si G est un groupe (non nécessairement fini) d'automorphismes agissant trivialement sur le réseau transcendant, alors G est symplectique. En effet, puisque $\mathrm{rg}(\mathrm{T}(X)) \geq 3$ et $\mathrm{rg}(\mathrm{T}(X) \cap \mathrm{NS}(X)) \leq 1$ il existe $t \in \mathrm{T}(X) \setminus (\mathrm{T}(X) \cap \mathrm{NS}(S))$, pour lequel pour tout $g \in G$ on a*

$$q(\sigma_X, t) = q(g^*\sigma_X, g^*t) = \beta(g)q(\sigma_X, t)$$

donc $(1 - \beta(g))q(\sigma_X, t) = 0$ mais $t \notin \mathrm{NS}(S)$ donc $\beta(g) = 1$.
2. *La deuxième assertion est vraie pour toute variété symplectique holomorphe irréductible de type hyperbolique ou elliptique (par le même argument).*

3. *La troisième assertion dans le cas hyperbolique est trivialement vraie si le groupe G est constitué uniquement d'automorphismes naturels, d'après le résultat similaire de Nikulin, mais le cas général échappe.*

D'après Oguiso [**14**, Théorème 1.4], le groupe d'automorphismes d'une variété symplectique holomorphe non projective est de type fini mais la question reste ouverte dans le cas projectif (*loc. cit.*). On sait par contre que dans cette situation, le groupe quotient $\mathrm{Aut}(X)/\mathrm{Aut}^0(X)$ est cyclique fini (Beauville [**2**]). Si S est une surface K3, on sait que l'application $\mathrm{Aut}(S^{[n]}) \to \mathcal{O}(H^2(S^{[n]}, \mathbb{Z}))$ est injective, donc on peut se demander si les groupes $\mathrm{Aut}^0(S^{[n]})$ et $\mathrm{Aut}(S^{[n]})$ sont de type fini encore dans le cas algébrique, généralisant le résultat de Sterk [**15**].

Références

[1] W. Barth, C. Peters & A. Van de Ven – *Compact complex surfaces*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)], vol. 4, Springer-Verlag, Berlin, 1984.

[2] A. Beauville – « Some remarks on Kähler manifolds with $c_1 = 0$. », Classification of algebraic and analytic manifolds, Proc. Symp., Katata/Jap. 1982, Prog. Math. 39, 1-26 (1983)., 1983.

[3] ———, « Variétés Kähleriennes dont la première classe de Chern est nulle », *J. Differential Geom.* **18** (1983), no. 4, p. 755–782.

[4] M. Beltrametti & A. J. Sommese – « Zero cycles and kth order embeddings of smooth projective surfaces », in *Problems in the theory of surfaces and their classification (Cortona, 1988)*, Sympos. Math., XXXII, Academic Press, London, 1991, With an appendix by Lothar Göttsche, p. 33–48.

[5] S. Boissière – « Automorphismes naturels de l'espace de Douady de points sur une surface », 2009.

[6] S. Boucksom – « Cônes positifs des variétés complexes compactes », Thèse, Grenoble, 2002.

[7] F. Catanese & L. Gœttsche – « d-very-ample line bundles and embeddings of Hilbert schemes of 0-cycles », *Manuscripta Math.* **68** (1990), no. 3, p. 337–341.

[8] O. Debarre – « Un contre-exemple au théorème de Torelli pour les variétés symplectiques irréductibles », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **299** (1984), no. 14, p. 681–684.

[9] ———, « Classes de cohomologie positives dans les variétés kählériennes compacts [d'après Boucksom, Demailly, Nakayama, Păun, Peternell . . .]. », Séminaire Bourbaki. Volume 2004/2005. Exposés 938–951. Paris : Société Mathématique de France. Astérisque 307, 199-228, Exp. No. 943 (2006)., 2006.

[10] M. Haiman – « Hilbert schemes, polygraphs and the Macdonald positivity conjecture. », *J. Am. Math. Soc.* **14** (2001), no. 4, p. 941–1006.

[11] D. Huybrechts – « Compact hyper-Kähler manifolds : basic results », *Invent. Math.* **135** (1999), no. 1, p. 63–113.

[12] ———, « Erratum to : Compact hyperkähler manifolds : basic results. », *Invent. Math.* **152** (2003), no. 1, p. 209–212.

[13] V. V. Nikulin – « Finite groups of automorphisms of Kählerian $K3$ surfaces », *Trudy Moskov. Mat. Obshch.* **38** (1979), p. 75–137.

[14] K. Oguiso – « Tits alternative in hypekähler manifolds », *Math. Res. Lett.* **13** (2006), no. 2-3, p. 307–316.

[15] H. Sterk – « Finiteness results for algebraic $K3$ surfaces », *Math. Z.* **189** (1985), no. 4, p. 507–513.

27 mai 2009

Samuel Boissière, Laboratoire J.A.Dieudonné UMR CNRS 6621, Université de Nice Sophia-Antipolis, Parc Valrose, F-06108 Nice • *E-mail :* `Samuel.Boissiere@unice.fr`
Url : `http://math.unice.fr/∼sb/`

Alessandra Sarti, Laboratoire de Mathmatiques et Applications, UMR CNRS 6086, Universit de Poitiers, Tlport 2, Boulevard Marie et Pierre Curie, F-86962 FUTUROSCOPE CHASSENEUIL • *E-mail :* `sarti@math. univ-poitiers.fr`
Url : `http://www-math.sp2mi.univ-poitiers.fr/∼sarti/`